B.Sc. IV Sem "Maths" Date:- 13/4/20

Teacher's Name:- Ms. Rekha Kesharwani

* **Subring (उपवलय)**:— मानलो S, Ring $(R,+,\cdot)$ का एक non empty subset है तथा Ring R के संयोजनों के योग "+" और गुणन "·" के अंतर्गत स्थायी हो और $(S,+,\cdot)$ स्वयं एक वलय हो तो $(S,+,\cdot)$, R का एक subring कहलाता है। i.e. $\boxed{S \subseteq R}$

Remark:- $(R,+,\cdot)$ और $(\{0\},+,\cdot)$ सदैव Ring $(R,+,\cdot)$ के subring होते हैं तथा ये R के विषम (improper) subring कहलाते हैं तथा इन दो उपवलयों के अतिरिक्त अन्य सभी उपवलय उचित या अतुच्छ उपवलय (proper or non-trivial subring) कहलाते हैं।

Ex:- $(I,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ का subring है।

Theorem:- Let $(R,+,\cdot)$ is a ring and $\phi \neq S \subseteq R$ then a subring $(S,+,\cdot)$ of $(R,+,\cdot)$ iff,

(i) $a \in S, b \in S \Rightarrow a-b \in S \;\forall\; a,b \in S$

(ii) $a \in S, b \in S \Rightarrow a\cdot b \in S \;\forall\; a,b \in S$

Proof:- Let $(S,+,\cdot)$ is a subring of $(R,+,\cdot)$ then $(S,+,\cdot)$ is also a ring $\Rightarrow$ $(S,+)$ is an abelian group.

now, $a,b \in S \Rightarrow a,-b \in S$ ($\because$ each element of S has additive inverse)

$\Rightarrow a+(-b) \in S$ ($\because$ S योग + के सापेक्ष closure है)

अतः संबंध (1) संतुष्ट होता है।

again, S is a Ring,

$\Rightarrow (S,\cdot)$ is a Semi Ring

$\Rightarrow S$, गुणन "·" के सापेक्ष closure है।

$\Rightarrow a\cdot b \in S \;\forall\; a,b \in S$

अतः संबंध (2) संतुष्ट होता है।

Converse:- मानलो $S \subseteq R$ इस प्रकार है कि नि. प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं

(i) $a,b \in S \Rightarrow a-b \in S \;\forall\; a,b \in S$

(ii) $a,b \in S \Rightarrow a\cdot b \in S \;\forall\; a,b \in S$

Scanned with CamScanner

then we have to prove S is a subring of R.

R_1:- प्रतिबंध (i) में $b = a$ लेने पर,

$a \cdot a \in S \Rightarrow a - a \in S \Rightarrow 0 \in S$

again, $0 \in S$, $a \in S \Rightarrow 0 - a \in S \Rightarrow -a \in S$

i.e. $a \in S$, $-a \in S$

$\Rightarrow a, b \in S \Rightarrow a, -b \in S \Rightarrow a - (-b) \in S$ {by (i)}

$\Rightarrow a + b \in S$

now, $a, b \in S \Rightarrow a, b \in R \Rightarrow a + b = b + a$ {$\because (R, +)$ is an abelian group}

इसी प्रकार हम Proof कर सकते है कि,

$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in S$

अतः $(S, +)$ एक abelian group है।

R_2:- प्रतिबंध (ii) से, $a \in S$, $b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S \quad \forall a, b \in S$

अतः S गुणन के सापेक्ष Closure है।

$\because$ R में associative law सत्य है अतएव S में भी सत्य होगा। क्योंकि $S \subseteq R$

R_3:- योग पर गुणन का distribution law S में सत्य है क्योंकि $S \subseteq R$ और R में वितरण नियम सत्य है।

$\therefore (S, +, \cdot)$ स्वयं एक Ring है।

अतः $(S, +, \cdot)$, Ring $(R, +, \cdot)$ का एक Subring है।

Hence proved.

* Intersection of subring :-

Theorem:- दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।
(Intersection of two subring is a subring)

Proof:- let $(S_1, +, \cdot)$ and $(S_2, +, \cdot)$ are two subrings of ring $(R, +, \cdot)$ then, $S_1 \cap S_2$ is non empty.

i.e. $S_1 \cap S_2 \neq \phi$

because atleast one element $0 \in S_1 \cap S_2$

now, This is sufficient to prove $S_1 \cap S_2$ is Sub Ring of R i.e.,

(i) $a \in S_1 \cap S_2$, $b \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow a-b \in S_1 \cap S_2$

and,

(ii) $a \in S_1 \cap S_2$, $b \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow a.b \in S_1 \cap S_2$

now,

$a \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow a \in S_1$, $a \in S_2$

$b \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow b \in S_1$, $b \in S_2$

Here, S_1 and S_2 are the two subrings

$\because$ $a \in S_1$, $b \in S_1 \Rightarrow a-b \in S_1$ and $a.b \in S_1$

and,

$a \in S_2$, $b \in S_2 \Rightarrow a-b \in S_2$ and $a.b \in S_2$

$\Rightarrow a-b \in S_1$, $a-b \in S_2 \Rightarrow a-b \in S_1 \cap S_2$

and,

$a \cdot b \in S_1$, $a \cdot b \in S_2 \Rightarrow a.b \in S_1 \cap S_2$

$\because$ $S_1 \cap S_2$ is a subring of Ring R.

Hence Proved.

Do Yourself :-

Theorem:- यदि R एक Ring इस प्रकार है कि $a^2 = a \ \forall \ a \in R$

Then Prove that,

(i) $a + a = 0 \ \forall \ a \in R$ i.e. R का प्रत्येक element स्वयं का additive inverse है।

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$; $b \in R$

(iii) R is commutative Ring.

—x—x—x—