Date - 04/05/20 | B.Sc. Physics IInd Semester UNIT-4 | by Gopal Jha

→ Phase space for a monoatomic gas and Number of microstates in Energy Range.

माना 1 मोल एकपरमाणुक आदर्श गैस (one mole monoatomic Ideal gas) आयतन (volume) V के बॉक्स में परमताप (absolute temparature) (T) पर (thermal equilibrium) ऊष्मीय सन्तुलन में है। चूंकि एक परमाणुक गैस के प्रत्येक अणु (molecule) की केवल स्थानान्तरीय गति (Translational motion) होती है। जिसकी स्वतंत्रता की कोटियाँ (degrees of freedom) तीन है। अतः उसकी अवस्था (state) व्यक्त करने के लिये तीन स्थिति निर्देशांक (x, y, z) एवं तीन संवेग निर्देशांक (momentum coordinate) (p_x, p_y, p_z) होगें इसके लिये षटविमीय Phase space की कल्पना करते है

स्थिति परास (position range) x व $(x+dx)$ तथा y व $(y+dy)$ तथा z तथा $z+dz$

तथा momentum range p_x, p_x+dp_x तथा p_y, p_y+dp_y एवं p_z तथा p_z+dp_z

में आयतन

$$d\tau = dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$$

Volume of Total phase space

$$\tau = \iiint \iiint dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$$

जहाँ $\iiint dx\,dy\,dz$ स्थिति आकाश का आयतन है

तथा $\iiint dp_x\,dp_y\,dp_z$ संवेग आकाश (momentum space) का आ० है

अब यदि कला आकाश को कला कोष्ठिकाओं (phase cells) में बाँटा जाये तथा

$dx \cdot dp_x = h$ तथा $dy \cdot dp_y = h$ तथा $dz \cdot dp_z = h$ हो तो

प्रत्येक कला कोष्ठिका आयतन $= h^3$ जहाँ (h प्लांक नियतांक)

⇒ ∴ ऊर्जा परास (energy range) ε व $\varepsilon + d\varepsilon$ में Phase cell की संख्या

$$g_{(d\varepsilon)} = \frac{1}{h^3} \iiint \iiint dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z \qquad (1)$$

Scanned by CamScanner

चूंकि बॉक्स का आयतन V तथा $\iiint dx\,dy\,dz = V$ ——— (ii)

Momentum Space (संवेग आकाश) यदि संवेग के x, y, तथा z घटक क्रमशः p_x, p_y तथा p_z हैं तथा कुल संवेग p है तो

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

यह एक गोले का समीकरण है जिसकी Radius p तथा Range of momentum (p तथा $p + dp$) के बीच संवेग आकाश का आयतन = उस गोलीय खोल (Spherical shell) का आयतन जिसकी आंतरिक त्रिज्या p व बाह्य त्रिज्या $(p+dp)$ है

अतः संवेग आकाश का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(p+dp)^3 - \frac{4}{3}\pi p^3$

$$= \frac{4}{3}\pi\left[p^3 + dp^3 + 3p^2dp + 3p\,dp^2 - \frac{4}{3}\pi p^3\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi p^3 + \frac{4}{3}\pi dp^3 + 4\pi p^2 dp + 4\pi p\,dp^2 - \frac{4}{3}\pi p^3$$

{Neglecting the higher power of dp}

$$= 4\pi p^2 dp$$

अर्थात $\iiint dp_x\,dp_y\,dp_z = 4\pi p^2 dp$ ——— (iii)

समी ① व ② व ③ से

अतः $g_{(d\epsilon)} = \frac{1}{h^3} V \times 4\pi p^2 dp$ ——— (iv)

But $p^2 = 2m\epsilon$ $\quad p = \sqrt{2m\epsilon}$

$$\frac{dp}{d\epsilon} = \sqrt{2m} \times \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$$

$$dp = \sqrt{2m} \times \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} d\epsilon = \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}\, d\epsilon$$

समी (iv) से

$$g_{d(\epsilon)} = \frac{1}{h^3} \times V \times 4\pi (2m\epsilon)\sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}\, d\epsilon$$

$$\boxed{g_{(d\epsilon)} = \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{3/2} \epsilon^{1/2}}{h^3} d\epsilon}$$

Scanned by CamScanner