B.Sc. IV Sem "Maths" Date: 15/4/20

Teacher's Name:- Ms. Rekha Kesharwani

Ch-6 Field (क्षेत्र)

Definition of Field:- एक Ring (वलय) $(F, +, \cdot)$ जिसमें कम से कम दो अवयव हैं क्षेत्र या field कहलाता है, यदि:

(i) यह क्रम विनिमेय है, (commutative)

(ii) यह इकाई अवयव रखता है; (It has unit element)

(iii) F में प्रत्येक शून्येतर अवयव गुणन के सापेक्ष प्रतिलोमी है। (Every non zero element of F has its multiplicative Inverse).

अतः $(F, +, \cdot)$ एक set F जिस पर परिभाषित दो binary operation योग "+" और गुणन "·" सहित इस प्रकार है कि प्रत्येक $a, b, c \in F$ के लिए नि. Postulates satisfy होते हैं :

F_1: $(F, +)$ is an abelian Group :-

F_{11}: Closure Property : $a \in F$, $b \in F$
$\Rightarrow a + b \in F \ \forall a, b \in F$.

F_{12}: Associative Property : $(a+b)+c = a+(b+c)$
$\forall a, b, c \in F$.

F_{13}: Identity :- $\exists \ 0 \in F$ such that,
$a + 0 = a \ \forall a \in F$.

F_{14}: Inverse :- for each $a \in F$ $\exists$ an inverse element $-a \in F$ i.e.,
$a + (-a) = (-a) + (a) = 0 \ \forall a \in F$.
where, $-a$ is the inverse of a

F_{15}: Commutative :- $a + b = b + a \ \forall a, b \in F$

F_2: $(F, \cdot)$ is a Abelian Group :-

F_{21}: Closure Property :- $a \in F$, $b \in F$
$\Rightarrow a \cdot b \in F \ \forall a, b \in F$

F_{22}: Associative property :- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$\forall a, b, c \in F$

F_{23}: Identity :- $\exists$ an identity $1 (\neq 0) \in F$ such that,
$a \cdot 1 = a \ \forall a \in F$.

F_{24}: Inverse:- For each $a (\neq 0) \in F$ $\exists$ an element $a^{-1} \in F$ such that,

$a.a^{-1} = 1$ (unity)

$a^{-1} \in F$ is the inverse of $a \in F$.

F_{25}: Commutative:- $a.b = b.a \ \forall \ a, b \in F$

F_3: Distributive Law:- $\forall \ a, b, c \in F$,

F_{31}: $a.(b+c) = a.b + a.c$ (Left distribution Law)

F_{32}: $(b+c).a = b.a + c.a$ (Right distribution Law)

Ex:- (1) $(Q, +, \cdot)$ is a field where Q is the set of rational number. (परिमेय सं.)

(2) $(R, +, \cdot)$, $(C, +, \cdot)$ is a field where R is the set of real no. and C is the field of complex number.

* Subfield (उपक्षेत्र):- एक field $(F, +, \cdot)$ का subset F' जिसमें कम से कम दो elements हैं F का Subfield कहलाता है यदि F', F में योग "+" और गुणन "." के सापेक्ष स्वयं एक field है।

* Prime Field (अभाज्य क्षेत्र):- एक field $(F, +, \cdot)$ prime field कहलाता है यदि इसका कोई उचित उपक्षेत्र (proper subfield) न हो, अर्थात यह स्वयं के अतिरिक्त कोई अन्य subfield न रखता हो।

Theorem:- Every field is an Integral domain.
(प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रांत होता है।)

Proof:- $\because$ A field $(F, +, \cdot)$ is commutative ring with unity, To show every field is an integral domain we've to show that, F has not zero divisor.

Let $a, b \in F$ be arbitrary element and $a \neq 0$ such that, $ab \neq 0$.

$\because a \neq 0 \Rightarrow \exists\, a^{-1} \in F$

So, $ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}.0$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b = 0$

$\Rightarrow 1.b = 0$

$\Rightarrow \boxed{b = 0}$

Simillarly, Let $ab = 0$ and $b \neq 0$

$\because b \neq 0 \Rightarrow \exists\, b^{-1} \in F$

So, $ab = 0 \Rightarrow (ab)b^{-1} = 0.b^{-1}$

$\Rightarrow a(bb^{-1}) = 0$

$\Rightarrow a.1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{a = 0}$

In a field $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ or $b = 0$

So,

In field has not zero divisor.

$\therefore$ Every field is an integral domain.

but, the converse is not true.

Hence proved

* क्रमित क्षेत्र (ordered field) :- एक field $(F, +, \cdot)$ ordered कहलाता है यदि यह एक integral domain की तरह ordered हो। अतः ordered field $(F, +, \cdot)$ एक field है जो धन अवयवों के एक subset F_+ को अंतर्विष्ट करता है जो नि. प्रतिबंधों को satisfy करता हो;

(i) F_+ योग और गुणन के लिए closure है अर्थात्:-

$a \in F_+,\ b \in F_+ \Rightarrow a+b \in F_+$ and $a.b \in F_+$

$\forall\ a, b \in F_+$

(ii) त्रिविकल्पता नियम (Trichotomy) satisfy होता है अर्थात्

$a \in F$ के लिए मात्र एक condition satisfy होती है

$a = 0$, $a \in F_+$, $-a \in F_+$