B.Sc. IV th Sem "Maths" Date:- 16/4/20

by: Ms. Rekha Kesharwani

PAGE NO.

DATE: / /

Theorem:- (1) Every finite Integral domain is a field.
(प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रांत एक क्षेत्र होता है।)

Proof:- मानलो D without zero divisor finite commutative ring, है जिसमें n elements $a_1, a_2, \dots a_n$ हैं अर्थात् $D = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$

अतएव D को एक field सिद्ध करने के लिए निम्न परिणाम सिद्ध करना sufficient है:

(i) D के unit element $1 \in D$ का अस्तित्व है अर्थात्, $1.a = a \ \forall \ a \in D$

(ii) D के प्रत्येक शून्येतर अवयव का D में multiplicative inverse है अर्थात्, $\forall a (\neq 0) \in D$, ∃ एक अवयव $b \in D$ इस प्रकार है कि $ba = 1$.

(i) Let $a = 0 \in D$ अब n गुणनफल $aa_1, aa_2 \dots aa_n$ होते हैं ये सभी D के किसी order में elements हैं। और ये सभी distinct (भिन्न-भिन्न) हैं।
क्योंकि यदि $aa_i = aa_j$ मानलें तो $i \neq j$ के लिए,

$$aa_i = aa_j, \ a \neq 0 \Rightarrow a(a_i - a_j) = 0$$
$$\Rightarrow a_i - a_j = 0$$
$$\Rightarrow a_i = a_j$$

$aa_i = aa_j \Rightarrow a_i = a_j$
which is the contradiction, $i \neq j$

Teacher's Signature ....

$\because aa_1, aa_2, \ldots, aa_n$ सभी D के distinct element किसी order में है।

now, $a \neq 0$, $a \in D \Rightarrow \exists\, aa_k \in D$ such that,

$aa_k = a$ where $1 \leq k \leq n$

$\Rightarrow aa_k = a \cdot 1$, $a_k \in D$

$\Rightarrow a_k = 1$, $a_k \in D$

$\Rightarrow 1 \in D$

हम दर्शायेंगे कि यह अवयव 1, D (गुणात्मक) multiplicative identity है।

मानलो y, D का कोई element है अतएव किसी $x \in D$ के लिए $ax = y = xa$

now, $1y = 1(ax)$ $\{\because ax = y\}$

$= (1a)x = ax = y$

$= y \cdot 1$

$1 \cdot y = y = y \cdot 1 \quad \forall\, y \in D$

अतः 1 Ring D का unit element है।

(ii) अब, $1 \in D \Rightarrow \exists\, aa_j \in D$ इस प्रकार है कि,

$aa_j = 1$, $1 \leq j \leq n$

$\Rightarrow aa_j = a_j a = 1$

$\Rightarrow a \neq 0 \in D$ का multiplicative inverse $a_j \in D$

$\because$ D का प्रत्येक शून्येतर element inverse है।

So D is a field.

Hence Proved

Theorem:— (2) Let $(F, +, \cdot)$ is a field. If $a, b \in F$ and $a \neq 0$ then prove that $\exists$ a unique element x such that $a.x = b$.

Proof:— $0 \neq a \in F \Rightarrow \exists\, a^{-1} \in F$ $\{\because F$ is a field$\}$

now, $0 \neq a \in F$, $ax = b \Rightarrow a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$,

$$ax = b$$
$$\Rightarrow x = a^{-1}b$$

now let x_1 and x_2 are two values of x which satisfies the equ. $ax = b$ then,

$ax_1 = b$, $ax_2 = b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore x$ is unique.

Hence Proved.

* **Do Yourself:—** दर्शाइए कि $a + b\sqrt{2}$ के रूप की संख्या का समुच्चय जहाँ a और b परिमेय सं. है, एक क्षेत्र है।

Ex:— In a field $(F, +, \cdot)$,

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}, \quad a, b \in F, \quad a \neq 0, b \neq 0.$$

Proof:—

$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = [(ab)a^{-1}]b^{-1}$ $\{$by Associativity$\}$

$= [a(ba^{-1})b^{-1}]$ $\{$ — " — $\}$

$= [a(a^{-1}b)]b^{-1}$ $\{$by Commutative$\}$

$= [(aa^{-1})b]b^{-1}$ $\{$by Associativity$\}$

$= [1 \cdot b]b^{-1}$ $\{\because aa^{-1} = 1\}$

$= bb^{-1} = 1$

इसी प्रकार, $(a^{-1}b^{-1})(ab) = 1$

$\therefore (ab)(a^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})(ab) = 1$

$\Rightarrow a^{-1}b^{-1}$ is the multiplicative inverse of ab.

$\Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ Hence Proved.

<u>Ex:-</u> In a field $(F, +, \cdot)$ then Prove that, if $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in F$ and $b \neq 0$, $d \neq 0$.

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

<u>proof:-</u> Here, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1}$

$\Rightarrow (ab^{-1})(bd) = (cd^{-1})(bd)$

$\Rightarrow (b^{-1}b)(ad) = (cb)(d^{-1}d)$

$\Rightarrow 1(ad) = (cb) \cdot 1$

$\Rightarrow ad = \cancel{cd}\ cb$

<u>or</u> $\Rightarrow ad = bc$

again,

$ad = bc \Rightarrow add^{-1} = bcd^{-1}$

$\Rightarrow b^{-1}a = b^{-1}(bcd^{-1})$

$\Rightarrow b^{-1}a = (b^{-1}b)(cd^{-1})$

PAGE NO.
DATE: / /

$$\Rightarrow b^{-1}a = cd^{-1} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{d}$$

$$\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

(ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bc}$

proof:- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = b^{-1}a + cd^{-1} = b^{-1}add^{-1} + b^{-1}bcd^{-1}$

$$= (b^{-1}ad + b^{-1}bc)d^{-1} = b^{-1}(ad+bc)d^{-1}$$

$$= \frac{ad+bc}{bd}$$

(iii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

proof:- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ab^{-1})(cd^{-1}) = a(b^{-1}c)d^{-1} = a(cb^{-1})d^{-1}$

$$= (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$$

$$= \frac{ac}{bd}$$ Hence Proved.

—x—x—x—

Teacher's Signature ....