Boltzmann's partition function [बोल्ट्जमैन का संवितरण फलन]

माना एक आदर्श गैस का निकाय परम ताप T पर ऊष्मीय संतुलन में है निकाय में एक समान, लेकिन विभेद्य गैस (distinguishable gas) के अणुओं (molecules) की कुल संख्या n है तथा तथा निकाय की कुल ऊर्जा E है। माना कि गैस के अणुओं का वितरण उनकी ऊर्जा के सापेक्ष इस प्रकार है कि ऊर्जा परास ε_r व $\varepsilon_r + d\varepsilon_r$ में अणुओं की संख्या n_r है तथा ऊर्जा ε_r की स्थूल अवस्था में उपस्थित सूक्ष्म अवस्थाओं की संख्या या अपभ्रष्टता (degeneracy) g_r है तो पूर्व प्रायिकता की समानता के नियम से,

$$n_r \propto g_r$$

तथा बोल्ट्जमैन के कैनोनिकल नियम से,

$$n_r \propto e^{-\varepsilon_r/kT}$$

$$n_r = A g_r e^{-\varepsilon_r/kT}$$

जहाँ A एक नियतांक है।

चूंकि निकाय में गैस के अणुओं की कुल संख्या n है अतः

$$n = \sum_r n_r$$

$$n = \sum_r A g_r e^{-\varepsilon_r/kT}$$

$$n = A \sum_r g_r e^{-\varepsilon_r/kT}$$

$$\frac{n}{A} = \sum_r g_r e^{-\varepsilon_r/kT} = Z \text{ (माना)}$$

राशि Z को बोल्ट्जमैन का संवितरण फलन कहते हैं।

एकपरमाणुक आदर्श गैस के लिये संवितरण फलन [Partition function for the monoatomic Ideal gas]

ε तथा $\varepsilon + d\varepsilon$ ऊर्जा परास में सूक्ष्म अवस्थाओं की संख्या

$$g = \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{3/2}}{h^3} d\varepsilon$$

संवितरण फलन से

$$n = A \int_0^\infty \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{3/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

लेकिन $\varepsilon = p^2/2m$ तब $\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{p}{m}$

तथा $\boxed{d\varepsilon = \frac{p\,dp}{m}}$

अतः $$n = A \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/2mkT} dp$$

प्रमाणिक समाकलन से (From standard Integral)

$$\int_0^\infty p^2 e^{-p^2/2mkT} dp = \frac{1}{4(1/2mkT)} \sqrt{\frac{\pi}{1/2mkT}}$$

$$n = A \frac{4\pi V}{h^3} \times \frac{1}{4(1/2mkT)} \sqrt{\frac{\pi}{1/2mkT}}$$

$$n = \frac{A \times V (2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}$$

संवितरण फलन $Z = \frac{n}{A}$

$$\boxed{Z = \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2}}$$